

解けて欲しい微分方程式達

2019-06-29作成

黒木 玄

2019-06-29 作成.

2019-07-02 完全微分方程式, Riccati, Clairaut.

2020-05-19 強制振動での $\alpha \rightarrow \omega$ での極限の計算.

2020-07-01 Hermite の多項式の解説を追加した.

2020-07-07 ベクトル場の図を追加

2020-07-14 積分因子という用語の紹介を追加した.

定数係数の線形常微分方程式

$$\partial = \frac{\partial}{\partial x}, \quad u = u(x), \quad p_1, \dots, p_n \text{ は定数.}$$

$$(*) \quad (\partial^n + p_1 \partial^{n-1} + \dots + p_{n-1} \partial + p_n) u = u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} u' + p_n u = 0.$$

解き方 $\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n = (\lambda - \alpha_1)^{m_1} \dots (\lambda - \alpha_s)^{m_s}$, α_i は互いに異なるとき,
方程式(*)の7へての解は

$$(**) \quad u(x) = \sum_{i=1}^s \sum_{k=0}^{m_i-1} a_{ik} x^k e^{\alpha_i x}, \quad a_{ik} \text{ は定数}$$

と一意に表される. 特に $m_1 = \dots = m_s = 1$ (重根がない場合) には(**)は

$$u(x) = a_1 e^{\alpha_1 x} + \dots + a_n e^{\alpha_n x}, \quad a_i \text{ は定数}$$

の形になる. 定数 a_{ik} (または a_i) には他の条件によって決定される. □

例 $(\partial^2 + \omega^2) u = 0$, $\omega > 0$ の解は $e^{\pm i\omega x} = \cos(\omega x) \pm i \sin(\omega x)$ を使うと,

$$u(x) = a e^{i\omega x} + b e^{-i\omega x} = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x).$$

と書ける. ここで $A = a + b$, $B = i(a - b)$. さらに条件 $u(0) = a$, $u'(0) = b$ を課すると,

$$u(x) = a \cos(\omega x) + \frac{b}{\omega} \sin(\omega x),$$
□

例 $(\partial^2 + 5\partial + 6) u = u'' + 5u' + 6u = 0$, $u(0) = a$, $u'(0) = b$ の解を求めよう.

$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$ の解は $\lambda = -2, -3$ である. $u'' + 5u' + 6u = 0$ の解は

$$u(x) = A e^{-2x} + B e^{-3x}$$

と書ける. ここで $u'(x) = -2A e^{-2x} - 3B e^{-3x}$ である.

$$u(0) \stackrel{\textcircled{1}}{=} A + B = a, \quad u'(0) \stackrel{\textcircled{2}}{=} -2A - 3B = b.$$

これは,

$$3 \times \textcircled{1} + \textcircled{2}: \quad A = 3a + b,$$

$$2 \times \textcircled{1} + \textcircled{2}: \quad -B = 2a + b, \quad B = -2a - b$$

と解けるので、解は,

$$u(x) = (3a + b) e^{-2x} + (-2a - b) e^{-3x}.$$
□

例 $(\partial^2 + \omega^2)^2 u = 0$ の解は $e^{\pm i\omega x}$, $x e^{\pm i\omega x}$ の一次結合で書ける $e^{\pm i\omega x} = \cos(\omega x) \pm i \sin(\omega x)$

を代入すると、解は

$$u(x) = a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x) + cx \cos(\omega x) + dx \sin(\omega x)$$

と表わされることを示す

□

強制振動付きの調和振動子 $\alpha, \omega > 0$ とする. $u = u(t)$, $\partial = \frac{\partial}{\partial t}$ とする.

$$(*) \quad (\partial^2 + \omega^2) u = p \cos(\alpha t) + q \sin(\alpha t).$$

解法 $(*)$ の右辺を v と書くと, v は $(\partial^2 + \alpha^2) v = 0$ の解になっている. ゆえに $(*)$ は

$$(*)' \quad (\partial^2 + \alpha^2)(\partial^2 + \omega^2) u = (\partial^2 + \alpha^2) v = 0$$

と書き直される. $(\lambda^2 + \alpha^2)(\lambda^2 + \omega^2) = (\lambda - i\alpha)(\lambda + i\alpha)(\lambda - i\omega)(\lambda + i\omega)$ が重根を持たない場合 ($\alpha \neq \omega$) と持つ場合 ($\alpha = \omega$) に場合分けして考える.

$\alpha \neq \omega$ のとき, $(*)'$ の解は

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + c \cos(\alpha t) + d \sin(\alpha t)$$

と書ける. このとき

$$\ddot{u}(t) = -\omega^2(a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)) - \alpha^2(c \cos(\alpha t) + d \sin(\alpha t)),$$

$$\therefore (\partial^2 + \omega^2) u = (\omega^2 - \alpha^2)(c \cos(\alpha t) + d \sin(\alpha t)).$$

これを $(*)$ と比較すると,

$$c = \frac{p}{\omega^2 - \alpha^2}, \quad d = \frac{q}{\omega^2 - \alpha^2}$$

のとき, $u(t)$ は $(*)$ の解になっているから, $(*)$ の解は

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + \frac{p}{\omega^2 - \alpha^2} \cos(\alpha t) + \frac{q}{\omega^2 - \alpha^2} \sin(\alpha t)$$

$\alpha = \omega$ のとき, $(*)'$ の解は

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + ct \cos(\omega t) + dt \sin(\omega t)$$

と書ける. このとき, $(fg)'' = f\ddot{g} + 2\dot{f}\dot{g} + f\ddot{g}$ と $f = ct, dt, g = \cos(\omega t), \sin(\omega t)$ に使えば,

$$\ddot{u}(t) = -\omega^2 u(t) - 2\omega c \sin(\omega t) + 2\omega d \cos(\omega t),$$

$$(\partial^2 + \omega^2) u(t) = -2\omega c \sin(\omega t) + 2\omega d \cos(\omega t)$$

ゆえに, $c = -\frac{q}{2\omega}, p = \frac{p}{2\omega}$ とし, $u(t)$ は $(*)$ を満たす. $(*)$ の解は

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) - \frac{q}{2\omega} t \cos(\omega t) + \frac{p}{2\omega} t \sin(\omega t). \quad \square$$

例 方程式 $\ddot{u}(t) + u(t) = \sin t$, $u(0) = 1, \dot{u}(0) = 0$ の解を求めよう.

$$u(t) = a \cos t + b \sin t - \frac{1}{2} t \cos t \text{ のとき, } \ddot{u}(t) = -u(t) + \sin t,$$

$$u(0) = a = 1, \dot{u}(t) = -a \sin t + b \cos t - \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} t \sin t, \dot{u}(0) = b - \frac{1}{2} = 0, b = \frac{1}{2}$$

$$u(t) = \cos t + \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t. \quad \square$$

$$\begin{aligned} (t \cos t)'' &= (-t \sin t + \cos t)' \\ &= -t \cos t - \sin t - \sin t \\ &= -t \cos t - 2 \sin t \end{aligned}$$

```
In[1]:= lode1 = {u'[t] + u[t] == Sin[t], u[0] == 1, u'[0] == 0}
```

正弦

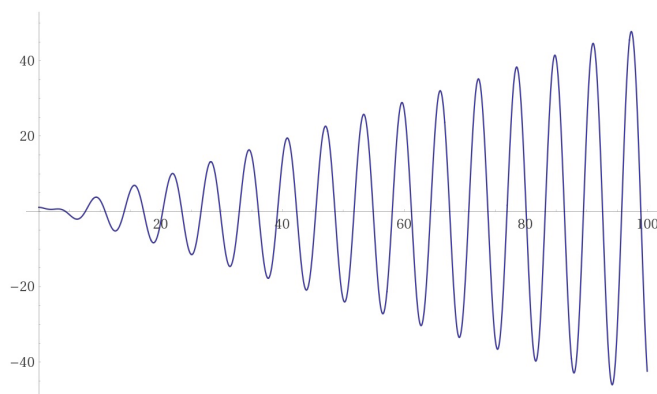
```
Out[1]:= {u[t] + u''[t] == Sin[t], u[0] == 1, u'[0] == 0}
```

```
In[4]:= DSolve[lode1, u[t], t] // Simplify // Expand
```

微分方程式を解く

簡単な形式に 展開

```
Out[4]:= {{u[t] -> Cos[t] - 1/2 t Cos[t] + Sin[t]/2}}
```



$$(\partial^2 + \omega^2)u = p \cos(\alpha t) + q \sin(\alpha t) \quad (\partial = d/dt, \omega > 0, \alpha > 0) \text{ の解の } \alpha \rightarrow \omega \text{ の極限}$$

$(\partial^2 + \omega^2)u = p \cos(\alpha t) + q \sin(\alpha t)$ の解は $\alpha \neq \omega$ のとき

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + \frac{p}{\omega^2 - \alpha^2} \cos(\alpha t) + \frac{q}{\omega^2 - \alpha^2} \sin(\alpha t) \quad \dots \textcircled{1}$$

と書ける。これの $\alpha \rightarrow \omega$ の極限を単純にとろうとしても分母の $\omega^2 - \alpha^2$ が 0 になるのでうまく行かない。
正しい問題設定は初期条件 $u(0) = A, \dot{u}(0) = B$ を固定して、解の極限を考えることである。

$$(*) \quad (\partial^2 + \omega^2)u = p \cos(\alpha t) + q \sin(\alpha t), \quad u(0) = A, \dot{u}(0) = B \quad (\alpha > 0, \omega > 0).$$

(i) $\alpha \neq \omega$ の場合 $\textcircled{1}$ のとき, $u(0) = a + \frac{p}{\omega^2 - \alpha^2}, \dot{u}(0) = \omega b + \alpha \frac{q}{\omega^2 - \alpha^2}$ なの初期条件と

$a = A - \frac{p}{\omega^2 - \alpha^2}, b = \frac{1}{\omega} \left(B - \frac{q}{\omega^2 - \alpha^2} \right)$ と同値である。ゆえに $(*)$ の解は

$$u(t) = A \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} B \sin(\omega t) - \frac{p}{\alpha^2 - \omega^2} (\cos(\alpha t) - \cos(\omega t)) - \frac{q}{\alpha^2 - \omega^2} (\sin(\alpha t) - \frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t)).$$

そして, $\alpha \rightarrow \omega$ のとき,

$$\frac{\cos(\alpha t) - \cos(\omega t)}{\alpha - \omega} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\omega} \cos(\alpha t) = -t \sin(\omega t),$$

$$\frac{\sin(\alpha t) - \frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t)}{\alpha - \omega} = \frac{\sin(\alpha t) - \sin(\omega t)}{\alpha - \omega} - \frac{\frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega} \sin(\omega t)}{\alpha - \omega} \rightarrow t \cos(\omega t) - \frac{1}{\omega} \sin(\omega t).$$

$$\begin{aligned} \therefore u(t) &\rightarrow A \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} B \sin(\omega t) + \frac{p}{2\omega} t \sin(\omega t) - \frac{q}{2\omega} \left(t \cos(\omega t) - \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \right) \\ &= A \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} \left(B + \frac{q}{2\omega} \right) \sin(\omega t) - \frac{q}{2\omega} t \cos(\omega t) + \frac{p}{2\omega} t \sin(\omega t) \end{aligned}$$

(ii) $\alpha = \omega$ の場合 $(\partial^2 + \omega^2)u = p \cos(\omega t) + q \sin(\omega t)$ の解は

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) - \frac{q}{2\omega} t \cos(\omega t) + \frac{p}{2\omega} t \sin(\omega t).$$

このとき, $u(0) = a, \dot{u}(0) = \omega b - \frac{q}{2\omega}$ なの初期条件 $u(0) = A, \dot{u}(0) = B$ と $a = A, b = \frac{1}{\omega} \left(B + \frac{q}{2\omega} \right)$ と同値である。ゆえに $(*)$ の解は,

$$u(t) = A \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} \left(B + \frac{q}{2\omega} \right) \sin(\omega t) - \frac{q}{2\omega} t \cos(\omega t) + \frac{p}{2\omega} t \sin(\omega t).$$

これは (i) で得た $(*)$ の解の $\alpha \rightarrow \omega$ の極限に一致する。 □

解説 $(*)$ と同値な方程式

$$(*)' \quad \frac{d^2 u}{dt^2} = -\omega^2 u + p \cos(\alpha t) + q \sin(\alpha t), \quad u(0) = A, \dot{u}(0) = B$$

は周期 $\frac{2\pi}{\omega}$ の調和振動子に外部から周期 $\frac{2\pi}{\alpha}$ で振動する力を与えた様子を記述している。

$\alpha \neq \omega$ であれば解は周期 $\frac{2\pi}{\omega}$ の振動と周期 $\frac{2\pi}{\alpha}$ の振動の和になり,

$\alpha = \omega$ ならば $t \rightarrow \infty$ で振幅が大きくなる解が得られる。

上の計算は $\alpha \neq \omega$ の解のどのような極限によって $\alpha = \omega$ の解が得られるかを示している。 □

単独1階の線形常微分方程式

$$u = u(x), \quad \partial = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$(*) \quad u'(x) = a(x)u(x).$$

解法 $u(x) = u(0) e^{\int_0^x a(y) dy}$ $\square$

例 $u'(x) = -x u(x)$ の解は, $\int_0^x (-y) dy = -\frac{x^2}{2}$ より, $u(x) = u(0) e^{-\frac{x^2}{2}}$. $\square$

単独1階の非斉次線形常微分方程式

$$(*) \quad u'(x) = a(x)u(x) + b(x).$$

← 定数変化法

解法 $u(x) = c(x) e^{\int_0^x a(y) dy}$ の形で解を求め, $u(0) = c(0)$,

$$u'(x) = a(x)c(x) e^{\int_0^x a(y) dy} + c'(x) e^{\int_0^x a(y) dy} = a(x)u(x) + c'(x) e^{\int_0^x a(y) dy}.$$

これと(*)を比較すると, $c'(x) = e^{-\int_0^x a(y) dy} b(x)$, $c(x) = u(0) + \int_0^x e^{-\int_0^z a(y) dy} b(z) dz$ のとき,
 $u(x)$ は(*)の解になる. (*)の解は次のように求める:

$$u(x) = c(x) e^{\int_0^x a(y) dy} = u(0) e^{\int_0^x a(y) dy} + \int_0^x e^{\int_z^x a(y) dy} b(z) dz.$$

確認 $u(x) = u(0) e^{\int_0^x a(y) dy} + \int_0^x e^{\int_z^x a(y) dy} b(z) dz$ のとき,

$$u'(x) = a(x) u(0) e^{\int_0^x a(y) dy} + a(x) \int_0^x e^{\int_z^x a(y) dy} b(z) dz + e^{\int_x^x a(y) dy} b(x) = a(x)u(x) + b(x), \quad \square$$

例 $u'(x) = -x u(x) + x$ を解くとき,

$$\int_x^x (-y) dy = \left[-\frac{y^2}{2} \right]_{y=x}^{y=x} = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2},$$

$$\int_0^x e^{\frac{z^2}{2}} z dz = \left[e^{\frac{z^2}{2}} \right]_{z=0}^{z=x} = e^{\frac{x^2}{2}} - 1$$

よって,

$$u(x) = u(0) e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{x^2}{2}} \left(e^{\frac{x^2}{2}} - 1 \right) = u(0) e^{-\frac{x^2}{2}} + 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

確認 そのとき, $-x u(x) + x = -x(u(x) - 1) = -x u(0) e^{-\frac{x^2}{2}} + x e^{-\frac{x^2}{2}},$

$$u'(x) = -x u(0) e^{-\frac{x^2}{2}} + x e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \swarrow \text{等しい.} \quad \text{OK.} \quad \square$$

ベルヌーイ
Bernoulli 方程式

$$(*) \quad y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y(x)^\alpha \quad (\alpha \neq 1 \text{ と仮定}).$$

解法 $(*) \Leftrightarrow y^{-\alpha}y' = a(x)y^{1-\alpha} + b(x)$ かつ, $(y^{1-\alpha})' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ ので

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{1-\alpha}(y^{1-\alpha})' = a(x)y^{1-\alpha} + b(x).$$

ゆえに, $u = y^{1-\alpha}$ とおくと,

$$(*) \Leftrightarrow u' = (1-\alpha)a(x)u + (1-\alpha)b(x)$$

これは u に関する単独1階の非斉次線形常微分方程式なのですでに説明した方法で解ける. $\square$

例 $y' = -xy + xy^3$ を解こう. $u = y^{1-3} = y^{-2}$ とおくと, $u' = 2xu - 2x$.

$u' = 2xu$ の解 e^{x^2} を用いて, $u = e^{x^2}c(x)$ の形で解を探そう. そのとき, $u' = 2xu + e^{x^2}c'(x)$.

この u が解であることは $c'(x) = -2xe^{-x^2}$ と同値. これを解くと, $c(x) = e^{-x^2} + C$.

そのとき, $u = e^{x^2}c(x) = 1 + Ce^{x^2}$, $y = \pm u^{1/(1-3)} = \pm (1 + Ce^{x^2})^{-\frac{1}{2}}$. $\square$

連立1階の定数係数線形常微分方程式

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}, \quad A = [a_{ij}] \text{ は } n \times n \text{ の定数行列 とする.}$$

$$(*) \quad \dot{u}(t) = A u(t).$$

解法 $u(t) = e^{tA} u(0), \quad e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k. \quad \square$

例 $u(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ のとき, $A^2 = -E, \quad e^{tA} = E \cos t + A \sin t = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$

$$\dot{u}(t) = A u(t) \text{ の解は } u(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0) \cos t - v(0) \sin t \\ u(0) \sin t + v(0) \cos t \end{bmatrix}. \quad \square$$

例 $\ddot{u}(t) = -\omega^2 u(t)$ は $u(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}$ とおくと, $\dot{u}(t) = A u(t)$ と書き直される.

$$A^2 = -\omega^2 E \text{ より, } A^{2k} = (-1)^k \omega^{2k} E = \begin{bmatrix} (-1)^k \omega^{2k} & 0 \\ 0 & (-1)^k \omega^{2k} \end{bmatrix}, \quad A^{2k+1} = (-1)^k \omega^{2k} A = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^k \omega^{2k} \\ (-1)^{k+1} \omega^{2k+2} & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{ゆえに, } e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\omega t)^{2k}}{(2k)!} E + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k} t^{2k+1}}{(2k+1)!} A = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \omega^{-1} \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}.$$

解は次のように書ける:

$$u(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} = e^{tA} \begin{bmatrix} u(0) \\ \dot{u}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0) \cos(\omega t) + \dot{u}(0) \omega^{-1} \sin(\omega t) \\ -\omega u(0) \sin(\omega t) + \dot{u}(0) \cos(\omega t) \end{bmatrix}.$$

特に, $u(t) = u(0) \cos(\omega t) + \dot{u}(0) \omega^{-1} \sin(\omega t).$ $\square$

例 $u(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$ のときの $\dot{u}(t) = A u(t)$ を解こう.

A を対角化しよう. $|\lambda E - A| = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$ なのて A の固有値は 2 と 3.

A の固有値 2 の固有ベクトルとして, $p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ がいとれる.

A の固有値 3 の固有ベクトルとして, $q = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ がいとれる.

$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ とおくと, $P^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ で, $A = P \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} P^{-1}.$

$$e^{tA} = P \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 3e^{3t} \\ e^{2t} & 4e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^{2t} - 3e^{3t} & -3e^{2t} + 3e^{3t} \\ 4e^{2t} - 4e^{3t} & -3e^{2t} + 4e^{3t} \end{bmatrix}.$$

$$u(t) = e^{tA} u(0) = \begin{bmatrix} (4u(0) - 3v(0))e^{2t} + (-3u(0) + 3v(0))e^{3t} \\ (4u(0) - 4v(0))e^{2t} + (-4u(0) + 4v(0))e^{3t} \end{bmatrix}. \quad \text{この } u(t) \text{ が解になる.}$$

確認 $\dot{u}(t) = \begin{bmatrix} (8u(0) - 6v(0))e^{2t} + (-9u(0) + 9v(0))e^{3t} \\ (8u(0) - 6v(0))e^{2t} + (-12u(0) + 12v(0))e^{3t} \end{bmatrix}, \quad A u(t) = \begin{bmatrix} (8u(0) - 6v(0))e^{2t} + (-9u(0) + 9v(0))e^{3t} \\ (8u(0) - 6v(0))e^{2t} + (-12u(0) + 12v(0))e^{3t} \end{bmatrix} \quad \text{OK.} \quad \square$

連立1階の非斉次定数係数線形常微分方程式

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}, \quad A = [a_{ij}] \text{ は定数 } n \times n \text{ 行列}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}.$$

$$(*) \quad \dot{u}(t) = A u(t) + b(t).$$

解法 $\dot{u}(t) = A u(t)$ の解 $u(t) = e^{tA} u(0)$ の定数ベクトル $u(0)$ をベクトル値函数 $\mathcal{C}(t)$ で置きかえた次の形の解を探す:

$$u(t) = e^{tA} \mathcal{C}(t), \quad \text{定数変化法}$$

このとき, $u(0) = \mathcal{C}(0)$,

$$\dot{u}(t) = A e^{tA} \mathcal{C}(t) + e^{tA} \dot{\mathcal{C}}(t) = A u(t) + e^{tA} \dot{\mathcal{C}}(t)$$

なので, $(*)$ とこれを比較すると,

$$\dot{\mathcal{C}}(t) = e^{-tA} b(t), \quad \mathcal{C}(t) = u(0) + \int_0^t e^{-sA} b(s) ds$$

のとき, $u(t)$ は $(*)$ の解になる. $(*)$ の解は

$$u(t) = e^{tA} \mathcal{C}(t) = e^{tA} u(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} b(s) ds.$$

確認 このとき, $\dot{u}(t) = A e^{tA} u(0) + A \int_0^t e^{(t-s)A} b(s) ds + e^{(t-t)A} b(t) = A u(t) + b(t)$. OK. $\square$

例 $u(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ のとき, $e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$ なので,

$$\dot{u}(t) = A u(t) + b(t), \quad b(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}$$

の解は,

$$u(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = e^{tA} u(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} b(s) ds$$

$$= \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} \cos(t-s) & -\sin(t-s) \\ \sin(t-s) & \cos(t-s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(s) \\ g(s) \end{bmatrix} ds$$

$$= \begin{bmatrix} u(0) \cos t - v(0) \sin t + \int_0^t (f(s) \cos(t-s) - g(s) \sin(t-s)) ds \\ u(0) \sin t + v(0) \cos t + \int_0^t (f(s) \sin(t-s) + g(s) \cos(t-s)) ds \end{bmatrix}.$$

(注) $\begin{cases} \dot{u}(t) = -v(t) + f(t) \\ \dot{v}(t) = u(t) + g(t) \end{cases}$

たとえば, $f(t)=0$, $g(t)=-1$ のとき, $\int_0^t \sin(t-s) ds = \left[\cos(t-s) \right]_{s=0}^{s=t} = 1 - \cos t$ なので

$$\begin{cases} u(t) = u(0) \cos t - v(0) \sin t + 1 - \cos t \\ v(t) = u(0) \sin t + v(0) \cos t - \sin t \end{cases}$$

$$\left(-\int_0^t \cos(t-s) ds = \left[\sin(t-s) \right]_{s=0}^{s=t} = -\sin t \right) \square$$

(注) $v(t) = -\dot{u}(t)$ としても可

一般の強制力付きの調和振動子

$$(*) \quad \ddot{u}(t) = -\omega^2 u(t) + f(t).$$

解法 $u(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$ とおくと, $(*)$ は次のように書き直される:

$$(*)' \quad \dot{u}(t) = A u(t) + b(t).$$

この $(*)'$ は次のように解けるのである:

$$u(t) = e^{tA} u(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} b(s) ds.$$

この場合には, $e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \omega^{-1} \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}$ である,

$$u(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0) \cos(\omega t) + \dot{u}(0) \omega^{-1} \sin(\omega t) + \int_0^t \omega^{-1} \sin(\omega(t-s)) f(s) ds \\ -\omega u(0) \sin(\omega t) + \dot{u}(0) \cos(\omega t) + \int_0^t \cos(\omega(t-s)) f(s) ds \end{bmatrix},$$

$(*)$ の解は次のように表わされる:

$$u(t) = u(0) \cos(\omega t) + \dot{u}(0) \omega^{-1} \sin(\omega t) + \int_0^t \omega^{-1} \sin(\omega(t-s)) f(s) ds,$$

□

例題 $u(t)$ を $t \geq 0$ 上の解と定まる $u(t)$ が $(*)$ を満たしていることを直接確認せよ.

解 $\dot{u}(t) = -\omega u(0) \sin(\omega t) + \dot{u}(0) \cos(\omega t) + \int_0^t \cos(\omega(t-s)) f(s) ds + \underbrace{\omega^{-1} \sin(\omega(t-t)) f(t)}_{\leftarrow = 0}$

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) &= -\omega^2 u(0) \cos(\omega t) - \omega^2 \dot{u}(0) \underbrace{\sin(\omega t)}_{\omega^{-1}} - \omega^2 \int_0^t \underbrace{\sin(\omega(t-s))}_{\omega^{-1}} f(s) ds + \underbrace{\cos(\omega(t-t))}_{=1} f(t) \\ &= -\omega^2 u(t) + f(t), \end{aligned}$$

□

連立1階の(非定数係数の)線形常微分方程式

E は $n \times n$ の単位行列であるとする。

$U(t) = [u_{ij}(t)]$, $A(t) = [a_{ij}(t)]$ は $n \times n$ 行列値関数であるとする。

$$(*) \quad \dot{U}(t) = A(t)U(t), \quad U(0) = E.$$

解法 $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n A(t_1) A(t_2) \cdots A(t_n). \quad \square$

(注) $U(t)$ の形は一般には具体的にわからない, $\square$

連立1階の非斉次の(非定数係数の)線形常微分方程式

$U(t)$ は上の $U(t)$ とする。

$$(*) \quad \dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t).$$

解法 $u(t) = U(t)c(t)$ の形で解を探す。 $u(0) = c(0)$ であつ

定数変化法

$$\dot{u}(t) = A(t)U(t)c(t) + U(t)\dot{c}(t) = A(t)u(t) + U(t)\dot{c}(t)$$

なので, $(*)$ と比較すると,

$$\dot{c}(t) = U(t)^{-1}b(t), \quad c(t) = c(0) + \int_0^t U(s)^{-1}b(s)ds$$

のよきの

$$u(t) = U(t)c(t) = U(t)c(0) + \int_0^t U(t)U(s)^{-1}b(s)ds$$

が $(*)$ の解になる。

$\square$

注意 $0 = \frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} (X(t)X(t)^{-1}) = \dot{X}(t)X(t)^{-1} + X(t)\frac{d(X(t)^{-1})}{dt}$ なのて

$$\frac{d}{dt}(X(t)^{-1}) = -X(t)^{-1}\dot{X}(t)X(t)^{-1},$$

これを使うと, 次を示せる: $U(t,s) = U(t)U(s)^{-1}$ であつと,

$$(1) \quad U(t,t) = E,$$

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial t} U(t,s) = A(t)U(t,s),$$

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial s} U(t,s) = -U(t)U(s)^{-1}A(s)U(s)U(s)^{-1} = -U(t)U(s)^{-1}A(s) = -U(t,s)A(s),$$

この3つの条件のうち (1) と (2) (または (1) と (3)) の2つの条件で $U(t,s)$ が一意に特徴付けられる。
 $U(t,s)$ は次のように表わされる:

$$\begin{aligned} U(t,s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_s^t dt_1 \int_s^{t_1} dt_2 \cdots \int_s^{t_{k-1}} dt_k A(t_1)A(t_2) \cdots A(t_k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_s^t dt_k \int_{t_k}^t dt_{k-1} \cdots \int_{t_2}^t dt_1 A(t_1)A(t_2) \cdots A(t_k) \end{aligned}$$

これが (1), (2), (3) を満たすことを確認せよ

単独2階の線形常微分方程式で0でない解が1つ分かっている場合

$$\partial = \frac{\partial}{\partial x}$$

方程式

$$(*) \quad (\partial^2 + p(x)\partial + q(x))u(x) = u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = 0$$

の0でない解 $f(x)$ が1つ分かっているとき, $f(x)$ と一次独立な別の解 $g(x)$ を求めよ,

解法1 $g(x) = f(x)c(x)$ ($c(x)$ は非定数函数) の形で $(*)$ の解を探してみる. このとき

$$g = fc, \quad g' = f'c + fc', \quad g'' = f''c + 2f'c' + fc''$$

なので

$$g'' + pg' + qg = (f'' + pf' + qf)c + (2f' + pf)c' + fc''.$$

g が $(*)$ の解であることと, $(2f' + pf)c' + fc'' = 0$ は同値であり, それを満たす c は次のように作れる:

$$c'' = -\left(2\frac{f'}{f} + p\right)c', \quad c'(x) = e^{-\int(2\frac{f'}{f} + p)dx} = f(x)^{-2} e^{-\int p(x)dx}.$$

$$c(x) = \int f(x)^{-2} e^{-\int p(x)dx} dx.$$

このとき,

$$g(x) = f(x) \int f(x)^{-2} e^{-\int p(x)dx} dx. \quad \square$$

解法2 f, g が $(*)$ の一次独立な解のとき, それらの Wronskian が $W(f, g)(x) = e^{-\int p(x)dx}$ となることを使う,

f, g の Wronskian を $W = W(f, g) = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - gf'$ と書くと,

$$W' = \underbrace{\begin{vmatrix} f' & g' \\ f' & g' \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} f & g \\ f'' & g'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f & g \\ -pf' - qf & -pg' - qg \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f & g \\ -pf' & -pg' \end{vmatrix} = -p \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = -pW$$

なので, $W = fg' - gf' = e^{-\int p(x)dx}$. ゆえに $g' = \frac{f'}{f}g + \frac{1}{f}e^{-\int p(x)dx}$. この解を

$g = c(x)e^{\int \frac{f'}{f}dx} = f(x)c(x)$ の形で探してみる. このとき, $g' = f'c + fc' = \frac{f'}{f}g + fc'$ ①と②を

比較すると, $c' = \frac{1}{f^2}e^{-\int p(x)dx}$ なので, そのような c のひとつを $c = \int \frac{1}{f^2}e^{-\int p(x)dx} dx$ と作れる.

このとき,

$$g(x) = fc = f(x) \int \frac{1}{f(x)^2} e^{-\int p(x)dx} dx. \quad (\text{これは上の解法1と同じ結果}). \quad \square$$

例 $(\partial - x)(\partial + x)u(x) = (\partial^2 - x^2 + 1)u(x) = u''(x) - (x^2 - 1)u(x) = 0$ を解こう. $(\partial + x)u(x) = 0$ の解はその解

なので $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ は解である. f と一次独立な解 g を $g = fc$ (c は非定数) の形で探してみる.

このとき, $g'' - (x^2 - 1)g = (f'' - (x^2 - 1)f)c + 2f'c' + fc'' = 2f'c' + fc''$. g が解であるような c のひとつを

$$2f'c' + fc'' = 0, \quad c'' = -2\frac{f'}{f}c', \quad c' = e^{-\int 2\frac{f'}{f}dx} = f^{-2}, \quad c = \int f^{-2}dx$$

と求めることができる. このとき,

$$g(x) = f(x)c(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \int e^{x^2} dx.$$

$(*)$ のすべての解は $u(x) = ae^{-\frac{x^2}{2}} + be^{-\frac{x^2}{2}} \int e^{x^2} dx$ (a, b は定数) と表わされる. $\square$

Hermite の多項式

k 次の Hermite の多項式 $H_k(x)$ を

e^{2xt-t^2} を Hermite の多項式の母関数と呼ぶ

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} H_k(x), \quad H_0(x)=1, \quad H_1(x)=2x, \quad H_2(x)=4x^2-2, \quad H_3(x)=8x^3-12x, \dots$$

と定める。さらに、 $\varphi_k(x)$, $G = G(x, t)$ を次のように定める:

$$\varphi_k(x) = H_k(x) e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad G = G(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \varphi_k(x) = e^{2xt-t^2-\frac{1}{2}x^2}$$

$G = G(x, t)$ を $\varphi_k(x)$ の母関数 (generating function) と呼ぶ

$\partial = \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ とおき、微分作用素 H を

$$H = -\frac{1}{2}(\partial_x - x)(\partial_x + x) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}x^2$$

と定める。この H を量子調和振動子の Hamiltonian (ハミルトニアン) と呼ぶ。

定理 $H \varphi_k(x) = \left(k + \frac{1}{2}\right) \varphi_k(x) \quad (k=0, 1, 2, \dots)$ $\leftarrow \varphi_k(x)$ は H の固有函数である。

証明 G に $\partial_x \pm x$ を作用させると、 $(\partial_x \pm x)G = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (\partial_x \pm x)\varphi_k(x)$ かつ、 $(\partial_x + x)G = (2t - x + x)G = 2tG = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2t^{l+1}}{l!} \varphi_l(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} 2k \varphi_{k-1}(x)$, $(\partial_x - x)G = (2t - 2x)G = -\frac{\partial}{\partial t}G = -\sum_{l=1}^{\infty} \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \varphi_l(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (-\varphi_{k+1}(x))$.

ゆえに、

$$(\partial_x + x)\varphi_k(x) = 2k\varphi_{k-1}(x), \quad (\partial_x - x)\varphi_k(x) = -\varphi_{k+1}(x).$$

これより、

$$(\partial_x - x)(\partial_x + x)\varphi_k(x) = 2k(\partial_x - x)\varphi_{k-1}(x) = -2k\varphi_k(x).$$

したがって、

$$H\varphi_k(x) = \left(-\frac{1}{2}(\partial_x - x)(\partial_x + x) + \frac{1}{2}\right)\varphi_k(x) = \left(-\frac{1}{2}(-2k) + \frac{1}{2}\right)\varphi_k(x) = \left(k + \frac{1}{2}\right)\varphi_k(x), \quad \text{q.e.d.}$$

定理 $\int_{-\infty}^{\infty} H_k(x) H_l(x) e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx = \delta_{kl} 2^k k! \sqrt{\pi}$. $\leftarrow$ 直交性

証明 ① は $\varphi_k(x) = H_k(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$ から出る。② を示そう。② の計算は母関数で行うと易い。

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(s, x) G(t, x) dx = \sum_{k, l=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} \frac{t^l}{l!} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx \quad \text{かつ} \quad G(t, x) = e^{2t^2 - t^2 - \frac{1}{2}x^2} \text{ より}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(s, x) G(t, x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 + 2(s+t)x - (s^2+t^2)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-(s+t))^2 + 2st} dx \quad \text{と変形,}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-a)^2} dx = \sqrt{\pi} \text{ より, 次は等しい:}$$

$$\sqrt{\pi} e^{2st} = \sqrt{\pi} \sum_{k, l=0}^{\infty} \frac{s^k t^l}{k! l!} = \sum_{k, l=0}^{\infty} \frac{s^k t^l}{k! l!} \delta_{kl} 2^k k! \sqrt{\pi}.$$

$$\text{以上を比較すると, } \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx = \delta_{kl} 2^k k! \sqrt{\pi}.$$

q.e.d.

変数分離形 $y = y(x)$

(*) $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$,

解法 $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C$ は (yの函数) = (xの函数) の形の式になる、これを y について解くと、 $y = (\text{xの函数})$ が得られる、これが (*) の解になる □

例 $\frac{dv}{dt} = 1+v^2$ を解こう。 $\int \frac{dv}{1+v^2} = \int dt + C$, $\arctan v = t + C$, $v = \tan(t+C)$. □

補足 $v = \tan t$ のとき、 $\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\cos t}{\cos t} + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t = 1 + v^2$. □

例 $\frac{dv}{dt} = 1-v^2$ を解こう。 $\int \frac{dv}{1-v^2} = \int dt + C$, $\operatorname{arctanh} v = t + C$, $v = \tanh(t+C)$. □

補足 $v = \tanh t = \frac{\sinh t}{\cosh t}$ のとき、 $\frac{dv}{dt} = \frac{\cosh t}{\cosh t} - \frac{\sinh^2 t}{\cosh^2 t} = 1 - \tanh^2 t = 1 - v^2$. □

例 (一様重力下に落下する物体の速度の慣性抵抗下の時間変化)

$$\frac{dv}{dt} = -1 - v|v| = \begin{cases} -1-v^2 & (v \geq 0), \\ -1+v^2 & (v \leq 0). \end{cases}$$

これを解こう。

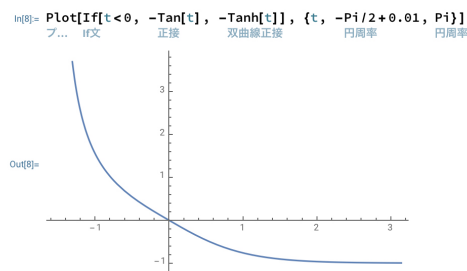
$v \leq 0$ のとき、 $\frac{dv}{dt} = -1+v^2$, $\int \frac{dv}{1-v^2} = -\int dt + C_1$, $\operatorname{arctanh} v = -t + C_1$, $v = -\tanh(t-C_1)$, $t-C_1 \geq 0$

$v \geq 0$ のとき、 $\frac{dv}{dt} = -1-v^2$, $\int \frac{dv}{1+v^2} = -\int dt + C_2$, $\arctan v = -t + C_2$, $v = -\tan(t-C_2)$, $-\frac{\pi}{2} < t-C_2 \leq 0$

この2つが連続的につながるためには $C = C_1 = C_2$ でなければいけない。

$$v(t) = \begin{cases} -\tan(t-C) & (-\frac{\pi}{2} + C < t \leq C) \\ -\tanh(t-C) & (C \leq t) \end{cases}$$

$C=0$ の場合 $\rightarrow$



補足 粘性抵抗の場合の運動方程式は $m \frac{dv}{dt} = -mg - kv$ の形なので適当に単位系ととりなおせば、 $\dot{v} = -1-v$ の形にできる、これを解くと、

$$\int \frac{dv}{1+v} = -\int dt + C, \log(1+v) = -t + C, v = e^{-(t-C)} - 1.$$

(確認 $\dot{v} = -e^{-(t-C)}$, $-1-v = -1-e^{-(t-C)}+1 = -e^{-(t-C)}$ OK.)

慣性抵抗の場合の運動方程式は $m \frac{dv}{dt} = -mg - kv|v|$ の形なので適当に単位系ととりなおせば、 $\dot{v} = -1-v|v|$ の形にできる、これを解いたのが上の例である。 □

例 (logistic equation) $\frac{dx}{dt} = x(1-x)$ ($0 < x < 1$) を解く。

$$\int \frac{dx}{x(1-x)} = \int dt + c, \quad \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}, \quad \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) dx = t + c,$$

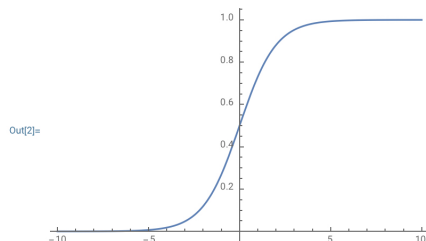
$$\log x - \log(1-x) = t + c, \quad \log \frac{x}{1-x} = t + c, \quad \frac{x}{1-x} = e^{t+c}, \quad x = e^{t+c} - e^{t+c} x$$

$$(1 + e^{t+c})x = e^{t+c}, \quad x = \frac{e^{t+c}}{1 + e^{t+c}} = \frac{1}{1 + e^{-(t+c)}}.$$

解 $x(t) = \frac{1}{1 + e^{-(t+c)}}$ が求まった,

$c=0$ の場合 $\rightarrow$

In[2]= Plot[1/(1+Exp[-t]), {t, -10, 10}]
プロット 指数関数



□

例 $\frac{dx}{dt} = x(1-x)$ の $x > 1$ の場合, $\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \right) dx = t + c, \quad \log x - \log(x-1) = t + c,$

$$\log \frac{x}{x-1} = t + c, \quad \frac{x}{x-1} = e^{t+c}, \quad x = e^{t+c} x - e^{t+c},$$

$$(e^{t+c} - 1)x = e^{t+c}, \quad x = \frac{e^{t+c}}{e^{t+c} - 1} = \frac{1}{1 - e^{-(t+c)}}.$$

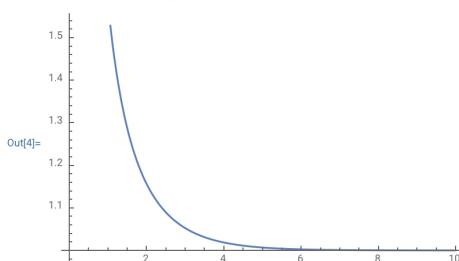
$c=0$

の場合

$\rightarrow$

解 $x(t) = \frac{1}{1 - e^{-(t+c)}}$ ($t+c > 0$) が求まった,

In[4]= Plot[1/(1-Exp[-t]), {t, 0, 10}]
プロット 指数関数



□

例 $\frac{dx}{dt} = x(1-x)$ の $x < 0$ の場合, $\int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) dx = t + c, \quad \log(-x) - \log(1-x) = t + c$

$$\log \frac{-x}{1-x} = t + c, \quad \frac{-x}{1-x} = e^{t+c}, \quad -x = e^{t+c} - e^{t+c} x$$

$$(e^{t+c} - 1)x = e^{t+c}, \quad x = \frac{e^{t+c}}{e^{t+c} - 1} = \frac{1}{1 - e^{-(t+c)}}.$$

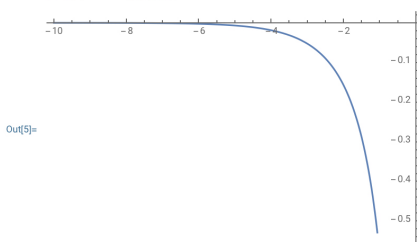
$c=0$

の場合

$\rightarrow$

解 $x(t) = \frac{1}{1 - e^{-(t+c)}}$ ($t+c < 0$) が求まった,

In[5]= Plot[1/(1-Exp[-t]), {t, -10, 0}]
プロット 指数関数



□

例 $x(t) = \frac{1}{1 + C e^{-t}}$ (C は定数) が $\frac{dx}{dt} = x(1-x)$ の解であることを示し, $x_0 \neq 0$ のとき,

$x(0) = x_0$ を満たす解を求めよう, $(*)$ のとき,

$$\dot{x}(t) = \frac{C e^{-t}}{(1 + C e^{-t})^2}, \quad x(t)(1-x(t)) = \frac{1}{1 + C e^{-t}} \left(1 - \frac{1}{1 + C e^{-t}} \right) = \frac{C e^{-t}}{(1 + C e^{-t})^2}, \quad \dot{x}(t) = x(t)(1-x(t)),$$

$$x(0) = \frac{1}{1 + C} = x_0, \quad 1 = x_0 + x_0 C, \quad C = x_0^{-1} - 1$$

$(*)$ の $x(0) = x_0 \neq 0$ を満たす解は, $x(t) = \frac{1}{1 + (x_0^{-1} - 1) e^{-t}}$.

□

注 $x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0^{-1} = \infty$ には $x(t) = 0$ という定数解が対応している □

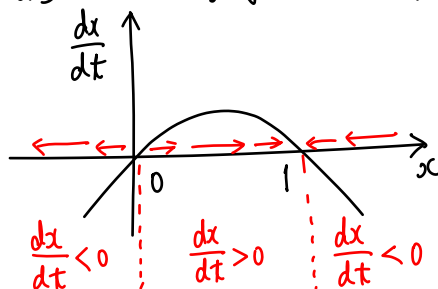
ベクトル場の図

logistic 方程式 $(*) \frac{dx}{dt} = x(1-x)$ (t は時間)

x 軸上の x の位置に $x(1-x)$ が正なら右向き、負なら左向きの長さがその絶対値のベクトル (矢線) を描く、 $\frac{dx}{dt} = x(1-x)$ が正ならば x は時間とともに増加し、負ならば減少する。

$x(1-x)$ の正負

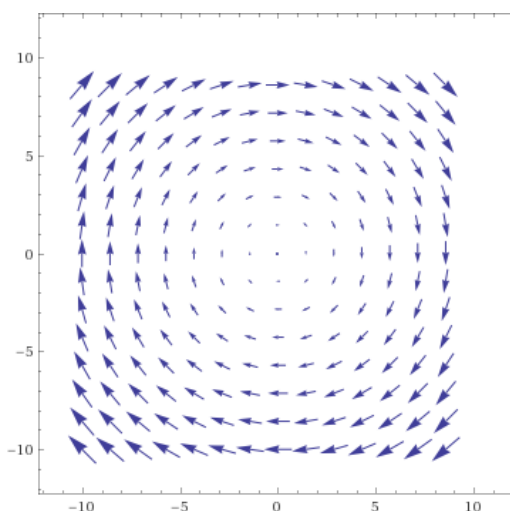
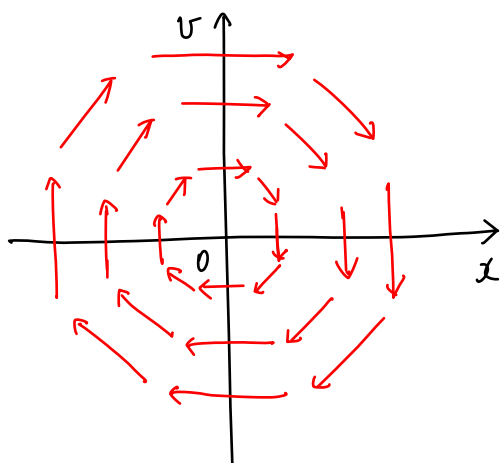
x	0	1
$x(1-x)$	-	0 + 0 -



(*) を解いた $x = x(t)$ は $0 < x < 1$ のとき時間とともに増加し、 $x < 0$ または $1 < x$ で減少する。

調和振動子 $(*) \frac{d^2x}{dt^2} = -x$. これは $v = \frac{dx}{dt}$ とおくと、 $\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -x \end{bmatrix}$ と書き直される。

xv 平面上の点 (x, v) にベクトル $\begin{bmatrix} v \\ -x \end{bmatrix}$ を矢線で描く。



plot a vector field 在 WolframAlpha.com で

xv 平面上で $(*)$ のとき $(x, v) = (x(t), \frac{dx(t)}{dt})$ は矢印の向きに矢線に沿って動いて行く。

そのような (x, v) は原点の回りを時計と同じ向きに回転しそうなことが図よりわかる。
(実際にそうなる)

以上のようにベクトル場の図を描けば、微分方程式を解かなくても、微分方程式の解の
だいたいの挙動がわかってしまう。

同次方程式 (*) $\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right)$.

解法 $y = \frac{x}{t}$ に変数変換する。そのとき、 $x = ty$ なのを

$$(*) \Leftrightarrow f(y) = \frac{dx}{dt} = y + t \frac{dy}{dt} \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{f(y) - y}{t} \quad \leftarrow \text{これは変数分離形.}$$

(**) は以下のように解ける:

$$\int \frac{dy}{f(y) - y} = \int \frac{dt}{t} + c = \log|t| + c, \quad t = \pm e^{-c + \int \frac{dy}{f(y) - y}} \quad \leftarrow (*)$$

(*) の逆函数を $y(t)$ と書くとき、(*) の解は $x(t) = ty(t)$ と表わされる。

□

例 (*) $\frac{dx}{dt} = e^{\frac{x}{t}} + \frac{x}{t}$ ($t > 0$) を解こう。 $x = ty$ を代入すると、

$$e^y + y = y + t \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{e^y}{t}, \quad \int e^{-y} dy = \int \frac{dt}{t} + c, \quad -e^{-y} = \log t + c$$

$$e^{-\frac{x}{t}} = -\log t - c, \quad -\frac{x}{t} = \log(-\log t - c), \quad x = -t \log(-\log t - c) \quad (0 < t < e^{-c})$$

これで解 $x(t) = -t \log(-\log t - c)$ が求まった。

$$\left(\begin{array}{l} \text{確認} \quad \dot{x}(t) = -\log(-\log t - c) + \frac{-t \cdot (-\frac{1}{t})}{-\log t - c} = -\log(-\log t - c) + \frac{1}{-\log t - c} \\ e^{\frac{x(t)}{t}} + \frac{x(t)}{t} = \frac{1}{-\log t - c} - \log(-\log t - c) \quad \leftarrow \text{正しい OK.} \end{array} \right)$$

□

同次方程式に変換できる場合 (*) $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+p}{cx+dy+q}\right), (c,d) \neq (0,0).$

解法 ① $p=q=0$ のときは

$$(*) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by}{cx+dy}\right) = f\left(\frac{a+b(y/x)}{c+d(y/x)}\right)$$

ここで (*) は同次方程式になる。

② $ad-bc=0$ のとき, $a, b \in a=kc, b=kd$ と表わせるので $u=cx+dy+q$ とおくと,

$$(*) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(cx+dy)+p}{cx+dy+q}\right) = f\left(\frac{k(u-q)+p}{u}\right)$$

であり

$$\frac{du}{dx} = c + d \frac{dy}{dx} = c + d f\left(\frac{k(u-q)+p}{u}\right) \leftarrow \text{これは変数分離形.}$$

③ $ad-bc \neq 0$ のとき. $\begin{cases} a\xi+b\eta=p \\ c\xi+d\eta=q \end{cases}$ に対して ξ, η が一意に存在する. そのとき, $\begin{cases} X=x+\xi \\ Y=y+\eta \end{cases}$

とおくと, $\begin{cases} aX+bY=ax+by+p \\ cX+dY=cx+dy+q \end{cases}$ となるので,

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{aX+bY}{cX+dY}\right) = f\left(\frac{a+b(Y/X)}{c+d(Y/X)}\right) \leftarrow \text{同次方程式.}$$

例 $\frac{dy}{dx} \stackrel{(*)}{=} \frac{ax+by+p}{cx+dy+q}$ ($ad-bc \neq 0, c=-b, d=1$ と仮定) を解いてみよう.

これが重要

分子分母を d で割れば " $d=1$ にできる

$$\begin{cases} a\xi+b\eta=p \\ c\xi+d\eta=q \end{cases} \text{ に対して } \xi, \eta \in \mathbb{R}, \begin{cases} X=x+\xi \\ Y=y+\eta \end{cases} \text{ とおくと } (*) \Leftrightarrow \frac{dY}{dX} \stackrel{(*)}{=} \frac{a+b(Y/X)}{c+b(Y/X)}.$$

$$u = \frac{Y}{X} \text{ とおくと, } Y=uX \text{ なので, } X \frac{du}{dX} + u = \frac{a+bu}{c+du}. \quad X \frac{du}{dX} = \frac{a+(b-c)u-du^2}{c+du}$$

$$\because c=-b, d=1 \text{ を使えば, } X \frac{du}{dX} = \frac{a+2bu-u^2}{-b+u} = -2 \frac{a+2bu-u^2}{\frac{\partial}{\partial u}(a+2bu-u^2)}.$$

ここで " $c=-b, d=1$ を使っていない,

$$\int \frac{\frac{\partial}{\partial u}(a+2bu-u^2)}{a+2bu-u^2} du = -2 \int \frac{dX}{X} + \gamma \quad \leftarrow \text{積分定数}$$

$$= 2b-2u \\ = -2(-b+u)$$

$$\log|a+2bu-u^2| = -2 \log|X| + \gamma = \log|e^\gamma X^{-2}|$$

$$a+2bu-u^2 = \pm e^\gamma X^{-2}, \quad C = \pm e^\gamma \text{ とおくと, } (a-2bu-u^2)X^2 = C.$$

$$u = Y/X \text{ を代入すると, } aX^2 + 2bXY - Y^2 = C.$$

$$Y^2 - 2bXY - aX^2 + C = 0, \quad (Y-bX)^2 - (a+b^2)X^2 + C = 0. \quad Y = bX \pm \sqrt{(a+b^2)X^2 - C}.$$

$$X = x+\xi, Y = y+\eta \text{ を代入すると}$$

$$y = -\eta + b(x+\xi) \pm \sqrt{(a+b^2)(x+\xi)^2 - C}.$$

↑

これが解.

$p=q=0$ の場合 $\rightarrow$

In[1]:= ode3 = {y'[x] == (a x + b y[x]) / (-b x + y[x])}

Out[1]:= {y[x] == \frac{a x + b y[x]}{-b x + y[x]}}

In[2]:= DSolve[ode3, y[x], x]

微分方程式を解く

Out[2]:= {{y[x] -> b x - \sqrt{-e^{2 C_1} + a x^2 + b^2 x^2}}, {y[x] -> b x + \sqrt{-e^{2 C_1} + a x^2 + b^2 x^2}}}

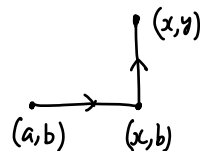
完全微分方程式

$q_x(x, y) = p_y(x, y)$ のとき, 可積分条件と呼ばれる.

(*) $df(x, y) = p(x, y) dx + q(x, y) dy$ (これは $f_x = p, f_y = q$ と同値)

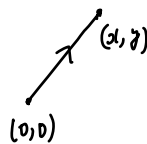
といたす函数 $f(x, y)$ を求めよ.

解法例1 $f(x, y) = \int_a^x p(s, b) ds + \int_b^y q(x, t) dt.$



確認
$$\begin{cases} f_x(x, y) = p(x, b) + \int_b^y q_x(x, t) dt = p(x, b) + \int_b^y p_y(x, t) dt = p(x, b) + [p(x, t)]_{t=b}^{t=y} = p(x, y), \\ f_y(x, y) = q(x, y). \end{cases} \quad \text{OK.}$$

解法例2 $f(x, y) = \int_0^1 (p(xt, yt)x + q(xt, yt)y) dt$



確認
$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \int_0^1 (p(xt, yt) + p_x(xt, yt)xt + q_x(xt, yt)yt) dt \\ &= \int_0^1 (p(xt, yt) + p_x(xt, yt)xt + p_y(xt, yt)yt) dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} (p(xt, yt)t) dt = [p(xt, yt)t]_{t=0}^{t=1} = p(x, y). \end{aligned}$$

(注) $p dx + q dy$ が可積分条件を満たしていないとき, うまく $\lambda = \lambda(x, y)$ をみつけると $\lambda p dx + \lambda q dy$ が可積分条件を満たすことがある. そのとき, λ を 積分因子 と呼ぶ. 詳しくは説明しない.

同様にして, $f_y(x, y) = q(x, y).$

OK, $\square$

注意 $f_x = p, f_y = q$ のとき, $p_y = f_{xy} = f_{yx} = q_x$. $df = p dx + q dy$ といたす f が存在するためには $p_y = q_x$ という 可積分条件 が必要である. 以上の議論は一般の微分形式に拡張される. $\square$

例 $df = 2xy dx + (x^2 + \cos y) dy$ といたす $f = f(x, y)$ を求めよう. $p = 2xy, q = x^2 + \cos y$ のとき, $p_y = 2x = q_x$ なので可積分条件を満たしている.

$f(x, y) = \int_0^x 2s \cdot 0 ds + \int_0^y (x^2 + \cos t) dt = x^2 y + \sin y.$

確認
$$\begin{cases} f_x = 2xy, \\ f_y = x^2 + \cos y. \end{cases} \quad \text{(OK)} \quad \square$$

例 $df = (x^2 - y) dx + (y^2 - x) dy$ といたす $f = f(x, y)$ を求めよう. $(x^2 - y)_y = -1 = (y^2 - x)_x$ なので可積分条件を満たしている.

$f(x, y) = \int_0^x (s^2 - 0) ds + \int_0^y (t^2 - x) dt = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - xy$

確認
$$\begin{cases} f_x = x^2 - y, \\ f_y = -x + y^2. \end{cases} \quad \text{(OK)} \quad \square$$

例 $df = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$ といたす $f = f(x, y)$ を求めよう. $\leftarrow$ これはおもしろい例.

$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ なので可積分条件を満たす.

$f(x, y) = \int_0^x \frac{-0}{s^2 + 0^2} ds + \int_0^y \frac{x}{x^2 + t^2} dt = \int_0^{y/x} \frac{du}{1 + u^2} = \arctan \frac{y}{x}.$ $\leftarrow$ 多価函数とみなされる.

確認 $f_x = \frac{-y/x^2}{1 + (y/x)^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad f_y = \frac{1/x}{1 + (y/x)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$ (OK) $\square$

リッカティ Riccati 方程式 (*) $u'(x) + a(x)u(x)^2 + b(x)u + c(x) = 0$ ($a(x)$ は 0 でない関数), 以下, $\partial = \frac{\partial}{\partial x}$,

解法 $u(x) = \frac{1}{a(x)} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}$ とおくと, $\psi(x)$ に関する 2 階の線形常微分方程式

$$\left(\partial^2 + \left(b(x) - \frac{a'(x)}{a(x)}\right)\partial + a(x)c(x)\right)\psi(x) = 0$$

に帰着する. 以下はそのことの確認: $u = \frac{1}{a} \frac{\psi'}{\psi}$ のとき,

$$u' = -\frac{a'}{a^2} \frac{\psi'}{\psi} + \frac{1}{a} \frac{\psi''}{\psi} - \frac{1}{a} \left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2, \quad au^2 + bu + c = \frac{1}{a} \left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2 + \frac{b}{a} \frac{\psi'}{\psi} + c \text{ なのて},$$

$$u' + au^2 + bu + c = \frac{1}{a\psi} \left(\psi'' + \left(b - \frac{a'}{a}\right)\psi' + ac\psi\right).$$

□

例 $\alpha \neq \beta$ が定数のときの $u' + (u-\alpha)(u-\beta) = 0$ を解こう. $u = \frac{\psi'}{\psi}$ とおくと,

$$\psi'' - (\alpha + \beta)\psi' + \alpha\beta\psi = (\partial - \alpha)(\partial - \beta)\psi = 0$$

を解けはよい. この解は $\psi(x) = ae^{\alpha x} + be^{\beta x}$ なのて, $u(x) = \frac{a\alpha e^{\alpha x} + b\beta e^{\beta x}}{ae^{\alpha x} + be^{\beta x}}$.

□

例 $\alpha \neq \beta$ が定数のときの $u' + \frac{1}{x}(u-\alpha)(u-\beta) = 0$ を解こう. $u = x \frac{\psi'}{\psi}$ とおくと,

$$\psi'' - \frac{\alpha + \beta - 1}{x}\psi' + \frac{\alpha\beta}{x^2}\psi = \left(\partial - \frac{\beta-1}{x}\right)\left(\partial - \frac{\alpha}{x}\right)\psi = \left(\partial - \frac{\alpha-1}{x}\right)\left(\partial - \frac{\beta}{x}\right)\psi = 0.$$

この解は $\psi(x) = ax^{\alpha} + bx^{\beta}$ なのて $u(x) = x \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \frac{a\alpha x^{\alpha} + b\beta x^{\beta}}{ax^{\alpha} + bx^{\beta}}$.

□

例 $u'(x) - 3u(x)^2 + \frac{2}{x^2} = 0$ を解こう. $u = -\frac{1}{3} \frac{\psi'}{\psi}$ とおくと, $\psi'' = \frac{b}{x^2}\psi$ なのて $\psi(x) = ax^3 + bx^{-2}$,

$$u(x) = -\frac{1}{3} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = -\frac{1}{3} \frac{3ax^2 - 2bx^{-3}}{ax^3 + bx^{-2}}.$$

□

Riccati 方程式の理論的背景

$u = \frac{1}{a} \frac{\psi'}{\psi}$ という変換の出所

$$(*) \quad u' + Au^2 + Bu + C = 0. \quad (u = u(x), A = A(x), B = B(x), C = C(x))$$

$$u = \frac{1}{A} v \text{ とおくと,}$$

$$u' + Au^2 + Bu + C = \frac{1}{A} v' - \frac{A'}{A^2} v + \frac{1}{A} v^2 + \frac{B}{A} v + C = \frac{1}{A} (v' + v^2 + (B - \frac{A'}{A})v + AC)$$

そこで, $u = \frac{1}{A} v$, $b = B - \frac{A'}{A}$, $c = AC$ とおくと, $(*)$ は次の $(\star)$ に帰着する:

$$(\star) \quad v' + v^2 + bv + c = 0. \quad \text{ここが "a=1" となっている.}$$

$$\text{さらに, } v = \frac{\psi'}{\psi} \text{ とおくと,}$$

$$v' + v^2 + bv + c = \frac{\psi''}{\psi} - \underbrace{\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2}_{\text{キャンセル}} + \frac{b\psi'}{\psi} + \frac{c\psi}{\psi} = \frac{1}{\psi} (\psi'' + b\psi' + c\psi).$$

ゆえに, $v = \frac{\psi'}{\psi}$ とおくと, $(\star)$ は次の $(**)$ に帰着する:

$$(**) \quad \psi'' + b\psi' + c\psi = (\partial^2 + b\partial + c)\psi = 0.$$

ここまでは本質的に
1つ前の資料で説明した.

注意 $\begin{cases} v = \frac{\psi'}{\psi} \Leftrightarrow \psi' - v\psi = (\partial - v)\psi = 0. \\ (**) \quad (\partial^2 + b\partial + c)\psi = 0. \end{cases}$ この2つの線形常微分方程式の
あいだの関係について考えてみる.

$\partial^2 + b\partial + c$ を $\partial - v$ で右から割ってみる!

$$\begin{array}{r} \text{右\左 } \partial + (v+b) \\ \hline \partial - v \sqrt{\partial^2 + b\partial + c} \\ \partial^2 - v\partial - v' \\ \hline (v+b)\partial + v' + c \\ (v+b)\partial - v^2 - bv \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \xleftarrow{\quad} \partial \circ (\partial - v) = \partial^2 - \overbrace{\partial \circ v}^{v\partial + v'} = \partial^2 - v\partial - v' \\ \xleftarrow{\quad} (v+b)(\partial - v) = (v+b)\partial - v^2 - bv \end{array}$$

余り $\rightarrow v' + v^2 + bv + c \leftarrow$ Riccati 方程式の形が出て来た!

すなわち, $\partial^2 + b\partial + c \stackrel{(*)}{=} (\partial + (v+b))(\partial - v) + \underline{v' + v^2 + bv + c}$. 余り
Riccati 方程式は余りとして出て来る!

$v' + v^2 + bv + c = 0$ ならば $(\partial - v)\psi = 0$ の解 ψ は $(\partial^2 + b\partial + c)\psi = 0$ をみたす.
逆に ψ が $(\partial^2 + b\partial + c)\psi = 0$ の 0でない解ならば ψ は $v = \psi'/\psi$ について $(\partial - v)\psi = 0$ をみたすので, $(*)$ の両辺を ψ に作用させることにより, $(v' + v^2 + bv + c)\psi = 0$ となるから $v' + v^2 + bv + c = 0$ を得る.

クレロー

Clairaut 方程式

$$(*) \quad y = xy' - f(y') \quad (y = y(x))$$

解法 $(*)$ の両辺を微分すると, $y' = y' + xy'' - f'(y')y''$ となる $y''(x - f'(y')) = 0$.

$y'' = 0$ のとき y' は定数となるので, $y' = p = (\text{定数})$ とおくと, $y = xp - f(p)$, これは $(*)$ の解になっている.

$x = f'(y')$ のとき $f'(y') = x$ を y' について解いた結果を $y' = p(x)$ と書くと, $y = xp(x) - f(p(x))$.

これも $(*)$ の解になっている. (確認: $f'(p(x)) = x$, $y = xp(x) - f(p(x))$ のとき,

$$y' = p(x) + xp'(x) - \underbrace{f'(p(x))}_{=x} p'(x) = p(x) \text{ なので, } y = xy' - f(y'). \text{ OK.})$$

□

注意 Clairaut 方程式は解析力学や熱統計力学に出て来る ^{ルジャンドル} Legendre 変換と関係がある. □

注意 $y'' = 0$ のときの解 $y = xa - f(a)$ は $x = f'(y')$ のときの解 $y = xp(x) - f(p(x))$ ($f'(p(x)) = x$) の

接線になっている. $y = xp(x) - f(p(x))$, $f'(p(x)) = x$ のとき, $y' = p(x)$ なので, $p(x_0) = a$ とする x_0 をとると,

$$x = x_0 \text{ で接する接線は } y = a(x - x_0) + x_0 \underbrace{p(x_0)}_{=a} - f(\underbrace{p(x_0)}_a) = ax - f(a) \text{ になる.}$$

□

例 $f(p) = \frac{1}{2}p^2 - \alpha$ (α は定数) のとき, $y = xy' - f(y') = xy' - \frac{1}{2}(y')^2 + \alpha$ の解を求めよう.

両辺を微分すると, $y' = y' + xy'' - y'y''$ となる, $y''(x - y') = 0$.

$y'' = 0$ のとき 定数 p を y' に代入した $y = xp - \frac{1}{2}p^2 + \alpha$ が解になる

$y' = x$ のとき x を y' に代入した $y = x^2 - \frac{1}{2}x^2 + \alpha = \frac{1}{2}x^2 + \alpha$ が解になる.

□

例 $f(p) = p \log p - p - \alpha$ のとき, $y = xy' - f(y') = xy' - y' \log y' + y' + \alpha$ の解を求めよう.

両辺を微分すると, $y' = y' + xy'' - y'' \log y' - y'' + y''$ となる $y''(x - \log y') = 0$.

$y'' = 0$ のとき $y = xp - p \log p + p + \alpha$ が解になる.

$x = \log y'$ のとき $y' = e^x$ を代入した $y = xe^x - e^x x + e^x + \alpha = e^x + \alpha$ が解になる.

□